1

FISICA CUANTICA II

CONTROL DE MAYO, PROBLEMAS

CURSO 2022/2023 19 de Mayo de 2023

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado. Este examen cuenta un 75% de la nota.

1[4].- Un oscilador armonico unidimensional se encuentra en los instantes $t < 0$ en su estado fundamental $|0\rangle$. En el instante $t = 0$ un fuerza exterior actua sobre el oscilador de manera que su vector de estado se convierte en:

$$|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} c P} |0\rangle ,$$

siendo c una constante real y P el operador momento.

a) ¿A que corresponde el cambio de estado $|0\rangle \to |\psi(0)\rangle$?.

b) Supongamos que el oscilador se deja evolucionar a partir de $t \geq 0$ de forma que su estado inicial sea $|\psi(0)\rangle$. Obtengase el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ para todo $t \geq 0$ en terminos de los autoestados de la energia del oscilador.

c) Calculese el valor medio de la posicion de la particula para $t \geq 0$.

2[3]. El hamiltoniano de una particula de espin 1/2 es:

$$H = -\hbar\mu\, \sigma_y ,$$

siendo μ una constante real. En el instante inicial $t = 0$ el sistema esta en un estado caracterizado por la matriz densidad:

$$\rho(0) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2}\sigma_x\Big) .$$

a) Obtengase la matriz densidad para $t \geq 0$. ¿ Cuanto vale el vector de Bloch?.

b) Obtengase el valor medio del operador de espin $\vec{S}$ para $t \geq 0$. ¿Para que valores del tiempo t esta $\langle\vec{S}\rangle$ dirigido a lo largo del eje z?.

3[3].- Una particula de masa m se mueve en la direccion del eje x bajo la accion del potencial:

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \lambda\, e^{-\alpha x^2} ,$$

siendo ω y α dos constantes reales positivas y λ una constante real pequeña. Obtengase, a primer orden en λ, la energia del estado fundamental del sistema.

Un oscilador armonico unidimensional se encuentra en los instantes $t<0$ en su estado fundamental $|0\rangle$. En el instante $t=0$ una fuerza exterior actua sobre el oscilador de manera que su vector de estado se convierte en:

$$|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}cP}|0\rangle,$$

siendo c una constante y P el operador momento.

a) ¿A que corresponde el cambio de estado $|0\rangle \to |\psi(0)\rangle$?

b) Supongamos que la particula se deja evolucionar a partir de $t\geq 0$ de forma que su estado inicial sea $|\psi(0)\rangle$. Obtengase el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ para todo $t\geq 0$ en terminos de los autoestados de la energia del oscilador.

c) Calculese el valor medio de la posicion de la particula para $t\geq 0$.

---

a) El operador con el que se actua en $t=0$ es $T(c) = e^{-i/\hbar\, cP}$. Este operador es el que realiza la traslacion $X \to X + c$. Por lo tanto en $t=0$ la fuerza exterior esta desplazando la posicion de la particula una distancia c

b) Recordemos que el operador momento es

$$P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^{+}-a)$$

Entonces

$$-\frac{i}{\hbar} c P = \frac{c}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a^+ - a) = c\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,(a^+ - a)$$

Denotemos por Λ la cantidad

$$\boxed{\Lambda \equiv c\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}} \Rightarrow \boxed{-\frac{i}{\hbar} c P = \Lambda (a^+ - a)}$$

Queremos calcular $e^{-\frac{i}{\hbar} c P}$. Para ello utilizaremos la formula de Glauber

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B$$

con

$$A = \Lambda a^+ \quad , \quad B = -\Lambda a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}[A,B] = -\frac{\Lambda^2}{2}(-)\underbrace{[a^+, a]}_{-1} = -\frac{\Lambda^2}{2}$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar} c P} = e^{-\frac{\Lambda^2}{2}} e^{\Lambda a^+} e^{-\Lambda a}$$

Puesto que $a|0\rangle = 0 \Rightarrow e^{-\Lambda a}|0\rangle = |0\rangle \Rightarrow$

$$e^{-\frac{i}{\hbar} c P}|0\rangle = e^{-\frac{\Lambda^2}{2}} e^{\Lambda a^+}|0\rangle =$$

$$= e^{-\Lambda^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n}{n!} \underbrace{(a^+)^n |0\rangle}_{\sqrt{n!}\,|n\rangle} \Longrightarrow$$

$$\boxed{|\psi(0)\rangle = e^{-\Lambda^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle}$$

Para obtener $|\psi(t)\rangle$ a partir de $|\psi(0)\rangle$ hagamos

$$|n\rangle \to e^{-i/\hbar E_n t}|n\rangle = e^{-i/\hbar \hbar\omega(n+\frac{1}{2})t}|n\rangle$$

Es decir

$$|n\rangle \to e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}|n\rangle$$

Entonces

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{\Lambda^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}|n\rangle}$$

c) Para obtener el valor medio de X en el estado $|\psi(t)\rangle$ observemos que:

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a+a^+)$$

teniendo en cuenta que $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ y $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$, podemos escribir:

$$X|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}\,e^{-\Lambda^2/2}\left[\sqrt{n}\,|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right]$$

Escribamos el bra $\langle\psi(t)|$ en la forma

$$\langle\psi(t)| = e^{-\Lambda^2/2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Lambda^p}{\sqrt{p!}}e^{i\omega(p+\frac{1}{2})t}\langle p|$$

Entonces:

$$\langle X\rangle_t = \langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle =$$

$$= e^{-\Lambda^2}\sum_{n,p=0}^{\infty}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\frac{\Lambda^{n+p}}{\sqrt{n!\,p!}}\,e^{i(p-n)\omega t}\,\times$$

$$\times\left[\sqrt{n}\,\underbrace{\langle p|n-1\rangle}_{\delta_{p,n-1}} + \sqrt{n+1}\,\underbrace{\langle p|n+1\rangle}_{\delta_{p,n+1}}\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\; e^{-\Lambda^2}\left[e^{-i\omega t}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda^{2n-1}}{\sqrt{n!(n-1)!}}\sqrt{n}}_{1} + e^{i\omega t}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda^{2n+1}}{\sqrt{n!(n+1)!}}\sqrt{n+1}}_{2}\right]$$

Para calcular la suma 1 observamos que $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n!}} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \Rightarrow$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda^{\overbrace{2n-1}^{2(n-1)+1}}}{(n-1)!} = \Lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda^{2(n-1)}}{(n-1)!} = \Lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\Lambda^2)^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= \Lambda e^{\Lambda^2} = c\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\; e^{\Lambda^2}$$

De forma similar, usando que $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \Rightarrow$

$$2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda^{2n+1}}{\sqrt{n!}} = \Lambda e^{\Lambda^2} = c\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\; e^{\Lambda^2} = 1$$

Por lo tanto:

$$\langle x\rangle_t = \cancel{\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}}\; \cancel{e^{-\Lambda^2}}\; c\,\cancel{\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}}\; \cancel{e^{\Lambda^2}}\underbrace{\left[e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right]}_{2\cos\omega t} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\, c\, \cancel{2} \cos\omega t$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\langle x\rangle_t = c\cos\omega t}$$

Observación: El resultado para $t=0$ ($\langle x\rangle_{t=0} = c$) es facil de obtener por otro metodo:

$$\boxed{\langle x\rangle_{t=0}} = \langle\psi(0)|X|\psi(0)\rangle = \langle 0|\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}cP}\, X\, e^{-\frac{i}{\hbar}cP}}_{X + \frac{i}{\hbar}c\underbrace{[P,X]}_{-i\hbar} = X+c}|0\rangle =$$

$$= \langle 0|(X+c)|0\rangle = \boxed{c}$$

$\langle 0|X|0\rangle = 0$

El hamiltoniano de un sistema de dos niveles es

$$H = -\hbar\mu\,\sigma_y$$

En el instante inicial $t=0$ el sistema esta en un estado caracterizado por la matriz densidad

$$\rho(0) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sigma_x\right)$$

a) Obtengase la matriz densidad para $t \geq 0$

b) Obtengase el valor medio del operador de espin $\vec{S}$ para $t \geq 0$. ¿Para que valores del tiempo t esta $\langle \vec{S} \rangle$ dirigida a lo largo del eje z?

---

a) Si $U(t)$ es el operador de evolucion temporal

$$\rho(t) = U(t)\,\rho(0)\,U^{+}(t)$$

Como $H = -\hbar\mu\,\sigma_y \Rightarrow$

$$U(t) = e^{-i/\hbar\, Ht} = e^{-i/\cancel{\hbar}(-1)\cancel{\hbar}\mu\sigma_y t} \Rightarrow \boxed{U(t) = e^{i\mu\sigma_y t}}$$

$$U^{+}(t) = e^{-i\mu\sigma_y t} = U^{-1}(t) \Rightarrow$$

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}e^{i\mu\sigma_y t}\,\sigma_x\,e^{-i\mu\sigma_y t}\right)$$

Como $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x \Rightarrow$

$$e^{i\mu\sigma_y t}\,\sigma_x\,e^{-i\mu\sigma_y t} = e^{2i\mu\sigma_y t}\,\sigma_x =$$

$$= \left[\cos(2\mu t) + i \,\text{sen}(2\mu t)\,\sigma_y\right]\sigma_x =$$

$$= \cos(2\mu t)\,\sigma_x + i\,\text{sen}(2\mu t)\,\underbrace{\sigma_y\,\sigma_x}_{-i\sigma_z} \Longrightarrow$$

$$\boxed{e^{i\mu\sigma_y t}\,\sigma_x\,e^{-i\mu\sigma_y t} = \cos(2\mu t)\,\sigma_x + \text{sen}(2\mu t)\,\sigma_z}$$

Entonces

$$\boxed{\rho(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\cos(2\mu t)\,\sigma_x + \text{sen}(2\mu t)\,\sigma_z\right)\right]}$$

El vector de Bloch para $t \geq 0$ es

$$\boxed{\vec{b}(t) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\mu t),\ 0,\ \text{sen}(2\mu t)\right)}$$

↳ rota en el plano xz

b)

Como $\langle \vec{S} \rangle = \hbar/2\ \vec{b} \Rightarrow$

$$\boxed{\langle \vec{S} \rangle(t) = \frac{\hbar}{4}\left(\cos(2\mu t),\ 0,\ \text{sen}(2\mu t)\right)}$$

$\langle \vec{S} \rangle$ no tiene componente x cuando $\cos(2\mu t) = 0$

$\Rightarrow t = t_n = (2n+1)\,\pi/4\mu \iff 2\mu t = (2n+1)\,\pi/2$

$\Downarrow$

$\langle \vec{S} \rangle$ a lo largo del eje z si

$$t = t_n = (2n+1)\frac{\pi}{4\mu}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Una partícula de masa m se mueve en la dirección del eje x bajo la acción del potencial

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \lambda e^{-\alpha x^2}$$

siendo ω y α constantes reales positivas y λ otra constante real pequeña. Obtengase, a primer orden en λ, la energía del estado fundamental del sistema

---

Tenemos un oscilador armonico unidimensional perturbado por el potencial

$$\lambda e^{-\alpha x^2}$$

Los niveles de energia a primer orden en λ seran:

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) + E_n^{(1)}$$

$$E_n^{(1)} = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e^{-\alpha x^2} |\psi_n(x)|^2$$

Tomemos $n = 0 \implies$

$$E_0^{(1)} = \lambda \int dx \; e^{-\alpha x^2} |\psi_0(x)|^2$$

siendo

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

$$|\psi_0(x)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \Longrightarrow$$

$$e^{-\alpha x^2}|\psi_0(x)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\alpha x^2-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} =$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\left(\frac{m\omega}{\hbar}+\alpha\right)x^2}$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\alpha x^2}|\psi_0(x)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\left(\frac{m\omega}{\hbar}+\alpha\right)x^2}}_{\sqrt{\frac{\pi}{\frac{m\omega}{\hbar}+\alpha}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{m\omega}}{\sqrt{\cancel{\pi\hbar}}} \, \frac{\sqrt{\cancel{\pi}\hbar}}{\sqrt{m\omega+\hbar\alpha}} = \frac{\sqrt{m\omega}}{\sqrt{m\omega+\hbar\alpha}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{E_0^{(1)} = \lambda \frac{\sqrt{m\omega}}{\sqrt{m\omega+\hbar\alpha}}}$$

Entonces, a primer orden en α, la energia del estado fundamental es

$$\boxed{E_0 \simeq \frac{\hbar\omega}{2} + \lambda \frac{\sqrt{m\omega}}{\sqrt{m\omega+\hbar\alpha}}}$$